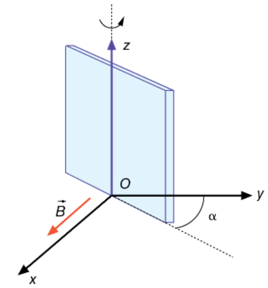
TEMA 7: "INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA"
SOLUCIONES EJERCICIOS PROPUESTOS 2



1.- Una espira cuadrada de 1,5 Ω de resistencia está inmersa en un campo magnético uniforme B = 0,03 T dirigido según el sentido positivo del eje X. La espira tiene 2 cm de lado y forma un ángulo α variable con el plano YZ como se muestra en la figura.

a) Si se hace girar la espira alrededor del eje Z con una frecuencia de rotación de 60 Hz, siendo α = π/2 en el instante t = 0, obtén la expresión de la fuerza electromotriz inducida en la espira en función del tiempo.

b) ¿Cuál debe ser la velocidad angular de la espira para que la corriente máxima que circule por ella sea 2 mA?

a) Como inicialmente α tiene un valor (para t = 0 ⇒ $\alpha_0 = \pi/2$), el valor de α va cambiando de la siguiente forma:

$$\alpha = \omega t + \alpha_0 \Rightarrow \alpha = \omega t + \frac{\pi}{2}$$

El valor del flujo viene dado por:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha = B \cdot S \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = B \cdot S \cdot \cos\left(2\pi f \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 0,03 \cdot \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 60 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \cos\left(120\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{Wb}$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \cos\left(120\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{dt} = -1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{d\cos\left(120\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)}{dt} =$$

$$= 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 120\pi \cdot \text{sen}\left(120\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = 4,5 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}\left(120\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{V}$$

Por tanto:

$$e = 4,5 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}\left(120\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{V}$$

b) Fuerza electromotriz máxima:

$$|e_m| = B \cdot S \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{|e_m|}{B \cdot S} = \frac{I_m \cdot R}{B \cdot S} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{3 \cdot 10^{-2} \cdot \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 0,25 \cdot 10^3 = 250 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

2.- Una bobina circular de 4 cm de radio y 30 vueltas se sitúa en un campo magnético dirigido perpendicularmente al plano de la bobina cuyo módulo en función del tiempo es:

B (t) = 0,01 t + 0,04 t², donde t está en segundos y B en teslas.

Determina:

a) El flujo magnético en la bobina en función del tiempo.

b) La fuerza electromotriz inducida en el instante t = 5,00 s.

a) Si calculamos el valor del flujo total que atraviesa las 30 espiras:

$$\Phi = N \cdot B \cdot S \cdot \cos\alpha = 30 \cdot \left(0,01t + 0,04t^2\right) \cdot \pi r^2 \cdot \cos 0^0 = 30 \cdot 0,01\left(t + 4t^2\right) \cdot \pi \cdot \left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot 1 = 1,51 \cdot 10^{-3} \cdot \left(t + 4t^2\right) \text{Wb}$$

b)

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(1,51 \cdot 10^{-3} \cdot \left(t + 4t^2\right)\right)}{dt} = -1,51 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{d\left(t + 4t^2\right)}{dt} = -1,51 \cdot 10^{-3} \cdot (8t + 1) =$$

$$= -1,51 \cdot 10^{-3} \cdot (8 \cdot 5,00 + 1) = -6,19 \cdot 10^{-2} \text{V}$$

(El signo se interpreta únicamente como indicativo de que la fuerza electromotriz es contraria a la variación de flujo magnético)

3.- Una bobina de 300 espiras circulares de 5 cm de radio se halla inmersa en un campo magnético uniforme B = 0,08 T con la dirección del eje de la bobina como se indica en la figura. Determina la fuerza electromotriz inducida media y el sentido de la corriente inducida, en Δt=0,05s si:

a) El campo magnético se anula.

b) La bobina gira 90º en torno a un eje perpendicular al campo.

c) La bobina gira 90º en torno a un eje paralelo al campo.

d) El campo invierte su sentido.

a)

$$e = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -300\frac{B_f \cdot S \cdot \cos\alpha - B_0 \cdot S \cdot \cos\alpha}{\Delta t} =$$

$$= -300\frac{0 \cdot S \cdot 1 - 0,08 \cdot \pi \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot 1}{0,05} = -300 \cdot \frac{-6,28 \cdot 10^{-4}}{0,05} = 3,77V$$

Sentido de la corriente inducida: sentido horario (la corriente inducida es tal que se opone a la variación de flujo como nos indica la ley de Lenz).

b)

$$e = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -300\frac{B \cdot S \cdot \cos\alpha_f - B \cdot S \cdot \cos\alpha_0}{\Delta t} =$$

$$= -300\frac{0,08 \cdot \pi \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot 0 - 0,08 \cdot \pi \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot 1}{0,05} = -300 \cdot \frac{-6,28 \cdot 10^{-4}}{0,05} = 3,77V$$

Sentido de la corriente inducida: sentido horario

c) En este caso no hay variación de flujo, luego e = 0V

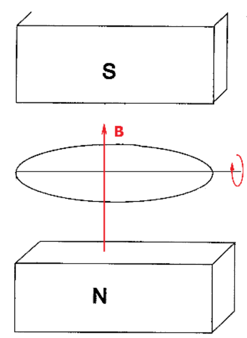
d)

$$e = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -300\frac{B_f \cdot S \cdot \cos\alpha_f - B_0 \cdot S \cdot \cos\alpha_0}{\Delta t} = -300\frac{0,08 \cdot \pi \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot (-1) - 0,08 \cdot \pi \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot 1}{0,05} =$$

$$= -300\frac{-0,08 \cdot \pi \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2 - 0,08 \cdot \pi \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2}{0,05} = -300 \cdot \frac{-2 \cdot 6,28 \cdot 10^{-4}}{0,05} = 7,54V$$

Sentido de la corriente inducida: sentido horario.

4.- Una espira circular de 10 cm de radio, situada inicialmente en el plano XY, gira a 50 rpm en torno a uno de sus diámetros bajo la presencia de un campo magnético $\vec{B} = 0,3\vec{k}T$.



Determina:

a) El flujo magnético que atraviesa la espira en el instante t = 2 s.

b) La expresión matemática de la fem inducida en la espira en función del tiempo.

De la Ley de Faraday se deduce:

a) Como en el instante inicial el plano de la espira coincide con el plano XY ⇒ para t = 0, $\alpha_0 = 0$

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha = B \cdot S \cdot \cos\left(\omega t + \alpha_0\right) = B \cdot S \cdot \cos\omega t$$

En donde ω vale:

$$\omega = 50\frac{rev}{min} = 50\frac{rev}{min} \cdot \frac{2\pi rad}{1rev} \cdot \frac{1min}{60s} = \frac{5}{3}\pi\frac{rad}{s}$$

$$\Phi = 0,3 \cdot 3,14 \cdot \left(0,1\right)^2 \cdot \cos\frac{5}{3}\pi t = 9,42 \cdot 10^{-3}\cos\frac{5}{3}\pi t$$

Para t = 2

$$\Phi = 9,42 \cdot 10^{-3} \cos \frac{10}{3} \pi = -4,7 \cdot 10^{-3} \text{Wb}$$

b)

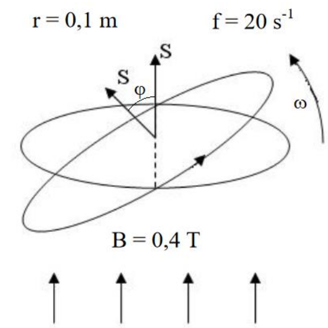
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B \cdot S \cdot \cos \omega t)}{dt} = -B \cdot S \cdot \frac{d(\cos \omega t)}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}\omega t = 9,42 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{5}{3}\pi \cdot \text{sen}\frac{5}{3}\pi t =$$

$$= 4,9 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\frac{5}{3}\pi t$$

5.- Una espira de 10 cm de radio se coloca en un campo magnético uniforme de 0,4 T y se le hace girar con una frecuencia de 20 Hz. En el instante inicial el plano de la espira es perpendicular al campo:

a) Escribe la expresión del flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo y determina el valor máximo de la fuerza electromotriz inducida.

b) Explica cómo cambiarían los valores máximos del flujo magnético y de la fem inducida si se duplicase el radio de la espira. ¿Y si se duplicara la frecuencia de giro?



a) Expresión general del flujo:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha = B \cdot S \cdot \cos(\omega t + \alpha_0)$$

para t = 0, el ángulo $\alpha_0 = 0$, ya que el plano de la espira es perpendicular al campo magnético. Por tanto, los vectores $\vec{S}$ y $\vec{B}$ tienen la misma dirección.

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\omega t = B \cdot S \cdot \cos 2\pi f t = 0,4 \cdot \pi \cdot 0,1^2 \cdot \cos(2\pi \cdot 20t) = 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(40\pi \cdot t)$$

Fuerza electromotriz inducida:

$$e = B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}\omega t$$

Valor máximo:

$$e = B \cdot S \cdot \omega = 0,4 \cdot \pi \cdot 10^{-2} \cdot 40\pi = 0,16\pi^2 V = 1,58V$$

b) PARA EL FLUJO:

Si se duplica el radio: $\Phi_2 = B \cdot S \cdot \cos\omega t = B \cdot \pi (2r_1)^2 \cdot \cos\omega t = 4 \cdot B \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot \cos\omega t = 4\Phi_1$

$\Phi_2 = 4\Phi_1$ si se duplica el radio.

El flujo máximo no depende de la frecuencia.

PARA LA FUERZA ELECTROMOTRIZ:

Si se duplica el radio: $e_2 = B \cdot \pi \cdot (2r_1)^2 \cdot \omega \cdot \text{sen}\omega t = 4 \cdot B \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot \omega \cdot \text{sen}\omega t = 4e_1$

$e_2 = 4e_1$ si se duplica el radio.

Si se duplica la frecuencia:

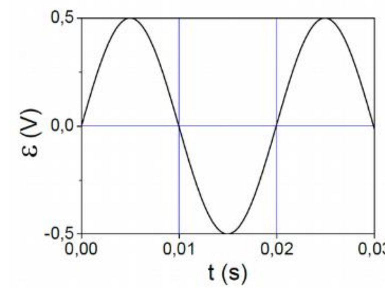
$$e_{2(\text{máx})} = B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}\omega t = B \cdot S \cdot \omega =$$
$$= B \cdot S \cdot 2\pi \cdot 2f_1 = 2 \cdot B \cdot S \cdot 2\pi f_1 = 2e_{1(\text{máx})}$$

$e_{2(\text{máx})} = 2e_{1(\text{máx})}$ si se duplica la frecuencia.

6.- Se hace girar una espira conductora circular de 5 cm de radio respecto a uno de sus diámetros en una región con un campo magnético uniforme de módulo B y dirección perpendicular a dicho diámetro. La fuerza electromotriz inducida (ε) en la espira depende del tiempo (t) como se muestra en la figura. Teniendo en cuenta los datos de esta figura, determine:

a) La frecuencia de giro de la espira y el valor de B.

b) La expresión del flujo de campo magnético a través de la espira en función del tiempo.



$$\alpha = \omega t + \alpha_0$$

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha = B \cdot S \cdot \cos(\omega t + \alpha_0)$$

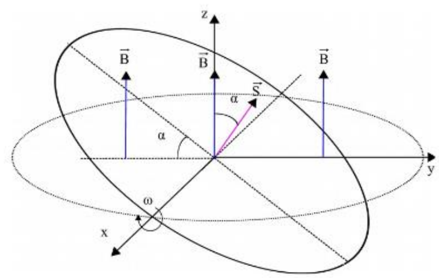
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_0)$$

a) Vemos en la figura que la fuerza electromotriz es periódica con T= 0,02 s, y un valor máximo de 0,5 V, luego:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,02} = 50\text{Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varepsilon_{máx} = B \cdot S \cdot \omega \Rightarrow B = \frac{\varepsilon_{máx}}{S \cdot \omega} = \frac{0,5}{\pi \cdot 0,05^2 \cdot 100\pi} = 0,203\text{T}$$



b)

Para t=0 $\Rightarrow$ ε_0=0

Luego: α_0=0 o $\alpha_0=\pi$

Como vemos que la pendiente de la fuerza electromotriz inducida en t=0 es positiva,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{d(B \cdot S \cdot \omega \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_0))}{dt} = B \cdot S \cdot \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_0)$$

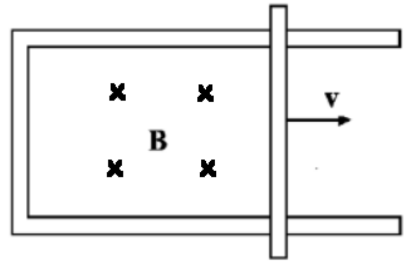
Para t=0:

$B \cdot S \cdot \omega^2 \cos\alpha_0 > 0 \Rightarrow \alpha_0$ tiene que ser 0

La expresión del flujo de campo magnético a través de la espira en función del tiempo es:

$$\Phi(t) = B \cdot S \cdot \cos(\omega t + \alpha_0) = 0,203 \cdot \pi \cdot 0,05^2 \cdot \cos(100\pi t) = 1,59 \cdot 10^{-3} \cos(100\pi t)\text{Wb}$$

7.- Una varilla conductora de longitud L se mueve sin fricción sobre dos raíles paralelos, como se muestra en la figura, en presencia de un campo magnético B uniforme y dirigido hacia dentro del papel con una velocidad constante v, gracias a la aplicación de una fuerza externa. La resistencia total del circuito es R.



Calcule:

a) La intensidad de corriente que circula por el circuito, indicando su sentido.

b) La fuerza externa que actúa sobre la varilla.

Nota: el enunciado no aporta datos numéricos: se trata de obtener expresiones

a) Tomamos $x = x_0$ m en la posición inicial de la varilla.

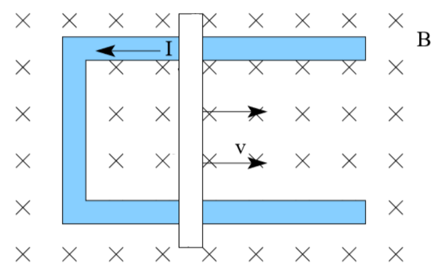
Consideramos L la longitud de la varilla entre los raíles (en el dibujo del enunciado hay una parte fuera de los raíles).

$$\Phi = B \cdot S = B \cdot L \cdot x = B \cdot L \cdot (x_0 + v \cdot t)$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \cdot L \cdot v$$

Utilizando la ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{B \cdot L \cdot v}{R}$$



Realizamos un diagrama representando el sentido de la corriente inducida. Con el desplazamiento de la varilla aumenta el flujo, por lo que la corriente inducida se opone a ese aumento de flujo.

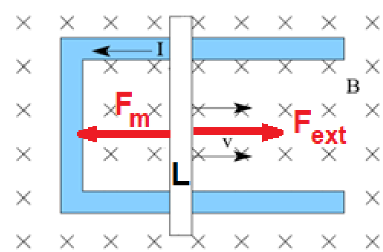
b) Se pide la fuerza externa que actúa sobre la varilla: si la velocidad es constante, la fuerza neta debe ser cero. Se podrían citar las fuerzas que actúan:

1 - Una fuerza asociada a que la corriente inducida en presencia del campo genera una fuerza. Esta fuerza frena la varilla, y su módulo sería:

$$F = ILB = B^2L^2\frac{v}{R}$$

por lo que vectorialmente sería

$$\vec{F} = -B^2L^2\frac{v}{R}\vec{i}$$



2 - Una fuerza aplicada sobre la varilla que consigue compensar la fuerza anterior de modo que la fuerza neta sea cero y la velocidad sea constante. Esta fuerza se puede considerar "externa" y la que pide el enunciado, que sería:

$$\vec{F}_{externa} = B^2L^2\frac{v}{R}\vec{i}$$