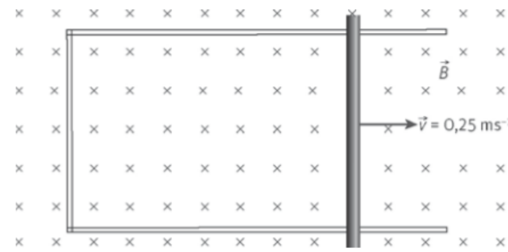
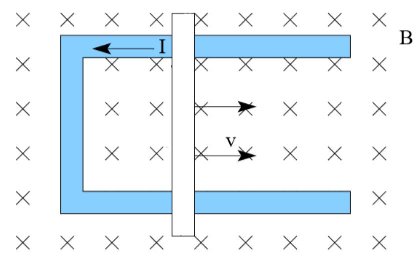
TEMA 7: “INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA”
MÁS EJERCICIOS RESUELTOS



1.- Una varilla conductora se mueve sin rozamiento con una velocidad de 0,25 ms^{-1} sobre dos raíles conductores fijos (tal y como indica la figura) separados una distancia de 12 cm en presencia de un campo magnético de valor 65 mT gracias a la aplicación de una fuerza externa.
a) Determina el valor y el sentido de la corriente inducida en el circuito si su resistencia es de 8,5 Ω.
b) Calcula el valor de la fuerza externa.
c) Supongamos que la varilla se detiene cuando se encuentra a 50 cm de su lado paralelo del circuito y que el campo magnético comienza a variar de la forma B = 65·10^{-3}+10^{-3}t^2 (B expresado en teslas y t en segundos) en el mismo sentido que indica la figura. En ese instante comenzamos a medir el tiempo. Determina el valor de la fem inducida en función del tiempo, el tipo de gráfica que se obtiene, el valor de la fem a los 10 segundos y el sentido de la corriente.

a) Tomamos x = x_0 m en la posición inicial de la varilla.

Consideramos L la longitud de la varilla entre los raíles (en el dibujo del enunciado hay una parte fuera de los raíles).



$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha = B \cdot L \cdot x \cdot 1 = B \cdot L \cdot (x_0 + v \cdot t)$$

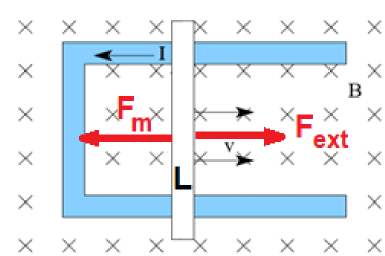
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \cdot L \cdot v = -65 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}25 = -1{,}95 \cdot 10^{-3} V$$

Utilizando la ley de Ohm:

$$I = \frac{|e|}{R} = \frac{1{,}95 \cdot 10^{-3}}{8{,}5} = 2{,}29 \cdot 10^{-4} A$$

Realizamos un diagrama representando el sentido de la corriente inducida. Con el desplazamiento de la varilla aumenta el flujo, por lo que la corriente inducida se opone a ese aumento de flujo: sentido antihorario de la corriente.

b) Se pide la fuerza externa que actúa sobre la varilla: si la velocidad es constante, la fuerza neta debe ser cero. Se podrían citar las fuerzas que actúan:
1 - Una fuerza asociada a que la corriente inducida en presencia del campo genera una fuerza. Esta fuerza frena la varilla, y su módulo sería:



$$F = I \cdot L \cdot B = 2{,}29 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}12 \cdot 65 \cdot 10^{-3} = 1{,}78 \cdot 10^{-6} N$$

por lo que vectorialmente sería

$$\vec{F} = -1{,}78 \cdot 10^{-6}\, \vec{i}$$

2 - Una fuerza aplicada sobre la varilla que consigue compensar la fuerza anterior de modo que la fuerza neta sea cero y la velocidad sea constante. Esta fuerza se puede considerar “externa” y la que pide el enunciado, que sería:

$$\vec{F}_{externa} = 1{,}78 \cdot 10^{-6}\, \vec{i}$$

c) En este caso lo que varía es el campo magnético, siendo la superficie constante y el ángulo entre el campo y el vector superficie es en todo momento 0^0 (cos 0^0 = 1)

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B \cdot S \cdot \cos\alpha)}{dt} = -S \cdot \frac{dB}{dt} = -0{,}12 \cdot 0{,}50 \cdot \frac{d(65 \cdot 10^{-3} + 10^{-3} t^2)}{dt} =$$
$$= -0{,}12 \cdot 0{,}50 \cdot 2 \cdot 10^{-3} t = -1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot t\ V$$

Se trata, pues, de la ecuación de una recta.

F.e.m. a los 10 segundos: $e_{10} = -1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 10\ V = -1{,}2 \cdot 10^{-3}\ V$

El flujo aumenta hacia el abajo con lo que la corriente eléctrica al oponerse a ese aumento será tal que crrea un campo magnético hacia afuera y por lo tanto tiene sentido antihorario.

2.- Una bobina formada por 500 espiras circulares de 3,5 cm de radio se encuentra en el seno de un campo magnético uniforme de valor 0,5 T de forma que el eje de la espira y el campo son paralelos. La espira comienza a girar en torno a un eje perpendicular al eje de la espira con una velocidad angular de giro de 900 r.p.m. en el instante en que el plano de la superficie y el campo magnético son perpendiculares.

Calcula:

a) El valor del flujo que atraviesa a cada espira en función del tiempo y el valor del flujo que atraviesa a cada espira a los 0,5s.

b) El valor de la f.e.m. inducida en cualquier instante.

c) La f.e.m. máxima que circula por el circuito, y el valor de la f.e.m. a los 0,5s de haber comenzado el movimiento de giro.

d) El valor de la f.e.m. que señalaría un voltímetro conectado al circuito.

a) El valor del flujo que atraviesa 1 espira es:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha = B \cdot S \cdot \cos(\omega t + \alpha_0)$$

Como en el instante inicial el plano de la superficie y el campo magnético son perpendiculares, el vector superficie y el vector inducción magnética son paralelos, por lo que $\alpha_0 = 0$.

Para este caso concreto, como ω nos lo han dado en rpm lo debemos transformar a rad/s:

$$900\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} = 900\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi\text{rad}}{1\text{rev}} \cdot \frac{1\,\text{min}}{60\text{s}} = \frac{1800}{60} \cdot \pi \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 30\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\omega t = 0,5 \cdot \pi \cdot 0,035^2 \cdot \cos 30\pi t = 1,92 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 30\pi t\ \text{Wb}$$

A los 0,5s (t = 0,5):

$$\Phi = 1,92 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(30\pi \cdot 0,5) = 1,92 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 15\pi = 1,92 \cdot 10^{-3} \cdot \cos\pi = -1,92 \cdot 10^{-3}\,\text{Wb}$$

b) El valor de la fem inducida en cualquier instante será por tanto:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d}{dt}(B \cdot S \cdot \cos\omega t) = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$\varepsilon = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t) = 500 \cdot 0,5 \cdot \pi \cdot 0,035^2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot \text{sen}(30\pi t) = 90,68 \cdot \text{sen}(30\pi t)\,\text{V}$$

c) Como el valor máximo del seno es 1, el valor máximo de la fem es:

$$\varepsilon_{\text{máx}} = 90,68\ \text{V}$$

Y al cabo de 0,5s:

$$\varepsilon = 90,68 \cdot \text{sen}(30\pi t)\,\text{V} = 90,68 \cdot \text{sen}(30\pi \cdot 1,5)\,\text{V} = 90,68 \cdot \text{sen}45\pi\text{V} = 90,68 \cdot \text{sen}\pi\text{V} = 0\text{V}$$

d) Los voltímetros señalan el valor de la fem eficaz:

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{90,68}{\sqrt{2}} = 64,12\ \text{V}$$

3.- Un campo magnético uniforme que varía con el tiempo según la expresión: B (t) = 3,7 cos (8t · π/4) (SI) atraviesa perpendicularmente una espira cuadrada de lado 60 cm.

a) Determina el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.

b) Calcula la fem inducida en la espira y su periodo.

a) Como el campo magnético y la espira son perpendiculares, el flujo magnético que atraviesa la espira es:

$$\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S = 3{,}7 \cdot \cos\left(8 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot L^2 = 3{,}7 \cdot \cos\left(8 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 0{,}6^2 = 1{,}33 \cdot \cos\left(8 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (SI)}$$

b) La fuerza electromotriz se calcula a partir de la variación del flujo magnético con el tiempo:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\left[1{,}33 \cdot \cos\left(8 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)\right]}{dt} = -1{,}33 \cdot \left(-\text{sen}\left(8 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot 8 = 10{,}64 \cdot \text{sen}\left(8 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (SI)}$$

El periodo de giro de la espira se calcula a partir de la expresión incluida dentro de la función trigonométrica presente en la ecuación de la fuerza electromotriz en función del tiempo:

$$\varepsilon = 10{,}64 \cdot \text{sen}\left(8 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \omega = 8 \text{ (SI)} \rightarrow \frac{2\pi}{T} = 8 \text{ (SI)} \rightarrow T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \text{ s} = 0{,}785 \text{ s}$$

4.- Una espira conductora está girando con un periodo de giro de 4,0 s en una región donde hay un campo magnético constante, produciéndose una fuerza electromotriz máxima en la espira de 5,2 V. Si se reduce el periodo de giro de la espira hasta 3 s, calcula cuánto valdrá ahora la fuerza electromotriz máxima inducida en la espira.

Si aumenta el periodo de giro en la espira, el flujo magnético a través de la espira variará más rápidamente, por lo que es de esperar que la fuerza electromotriz máxima en la espira aumente. Calculamos el flujo magnético a través de la espira.

$$\phi_B(t) = \vec{B}(t) \cdot \vec{S} = B(t) \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t) = B \cdot S \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = B \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

Suponemos que en el instante inicial la espira está colocada de manera perpendicular al campo magnético.

Entonces podemos calcular cómo varía este flujo magnético con el tiempo y deducir entonces el valor de la fuerza electromotriz.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B} \cdot \vec{S}\right)}{dt} = -\frac{d(B \cdot S)}{dt} = -\frac{d\left[B \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right]}{dt} = -B \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

Aplicamos la expresión anterior a las dos situaciones planteadas:

$$|\varepsilon|_1 = B \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{2\pi}{T_1} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T_1} \cdot t\right) \rightarrow |\varepsilon|_{1\text{ máx}} = B \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{2\pi}{T_1}$$

$$|\varepsilon|_2 = B \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{2\pi}{T_2} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T_2} \cdot t\right) \rightarrow |\varepsilon|_{2\text{ máx}} = B \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{2\pi}{T_2}$$

Dividimos una ecuación entre otra y obtenemos:

$$\frac{|\varepsilon|_{2\text{ máx}}}{|\varepsilon|_{1\text{ máx}}} = \frac{\cancel{B \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \frac{\cancel{2\pi}}{T_2}}{\cancel{B \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \frac{\cancel{2\pi}}{T_1}} = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow |\varepsilon|_{2\text{ máx}} = \frac{T_1}{T_2} \cdot |\varepsilon|_{1\text{ máx}} = \frac{4 \text{ s}}{3 \text{ s}} \cdot 5{,}2 \text{ V} = 6{,}9\widehat{3} \text{ V}$$